Distribuição normal

- ***Distribuição normal***:
  - ***Def***: Distribuição usada na representação de:
    - Quantidades que sejam a soma de um grande número de outras quantidades (T.L.C.);
    - Medições de características populacionais (altura, peso, etc.) ou dos respectivos erros.

- *Exercício*: Quais das seguintes definições podem ser *v. a.* normais?

a) X: "Tempo de descarga dum condensador, em horas"

b) X: "Peso de um bolo, em gramas"

c) X: "Número de chamadas atendidas em 8 recebidas"

d) X: "Volume de cerveja numa garrafa de litro, em centilitros"

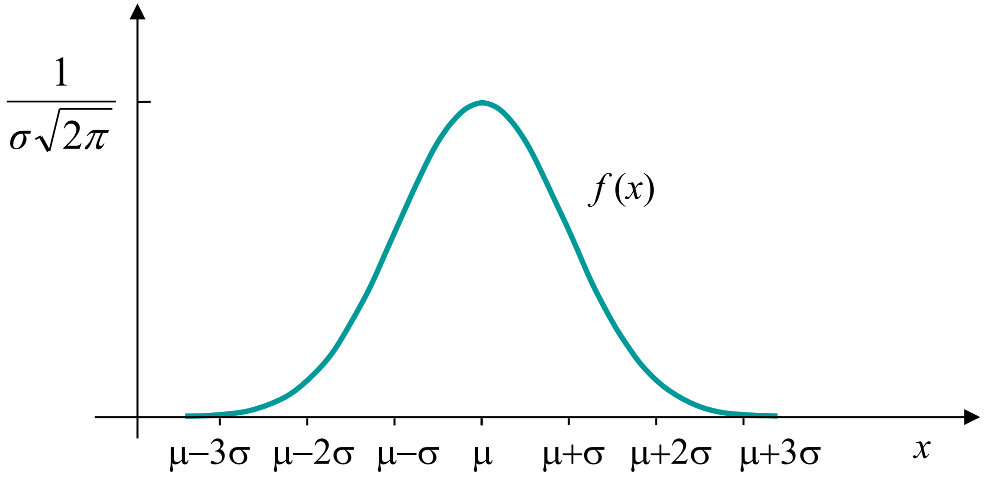
Distribuição normal

- *Def*: Se X é uma *v. a.* ***normal*** de ***parâmetros*** $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\sigma}^2$, então escreve-se:

$$X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$$

- *Def*: Se $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, então a sua ***f.d.p.*** é

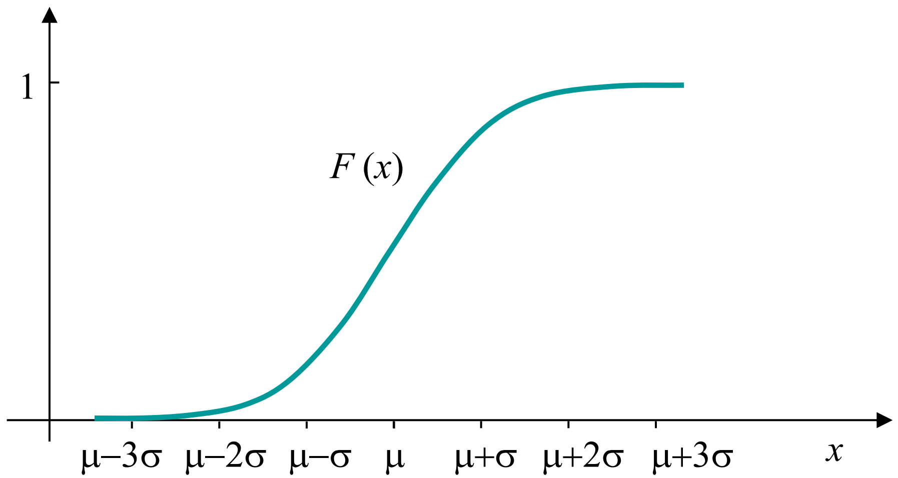
$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Distribuição normal

- *Teor*: Se $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, então a sua ***função de distribuição*** é

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \ , \quad x \in \Re$$



R: $F(x) = pnorm(x, \mu, \sigma)$

Nota: $F(x)$ não pode ser calculada analiticamente porque $f(x)$ não tem primitiva. Usam-se métodos numéricos.

Distribuição normal

- *Teor*: Se $X \sim \mathrm{N}(\mu,\, \sigma^2)$, então a sua ***média*** é dada por

$$E(X) = \mu$$

- *Teor*: Se $X \sim \mathrm{N}(\mu,\, \sigma^2)$, então a sua ***variância*** é dada por

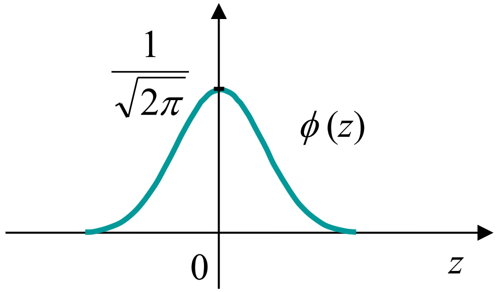
$$V(X) = \sigma^2$$

Distribuição normal reduzida

- *Def*: Se $Z \sim N(0, 1)$, então diz-se que Z tem ***distribuição normal reduzida***.

- *Teor*: Se $Z \sim N(0,1)$, então a sua ***f.d.p.*** é:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$



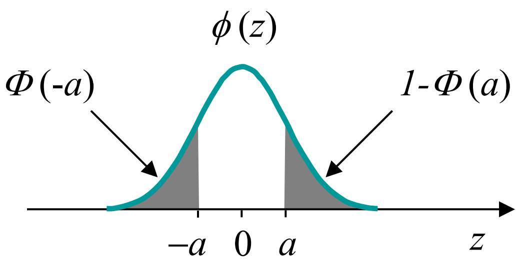
- *Teor*: Se $Z \sim N(0,1)$, então a sua ***função de distribuição*** é:

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \,, \quad z \in \Re$$

Distribuição normal reduzida

Teor:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$



- ***Conversão duma v. a. $X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ para uma v. a. $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$***:
  - ***Teor*** :

    Se $X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ então:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Distribuição normal reduzida

- Cálculo de probabilidades para $X \sim \mathrm{N}(\mu,\, \sigma^2)$ usando $Z \sim \mathrm{N}(0,\, 1)$:

$$i)\quad P(X \le a) = P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)}$$

$$ii)\quad P(X > a) = 1 - P(X \le a)$$

$$iii)\quad P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$$

$$iv)\quad P(X < a) = P(X \le a)$$

X é uma *v. a.* contínua

Exercício

Seja $X \sim$ N(5, 7). Usando a distribuição normal reduzida, calcule:

a) $P(X \leq 3{,}5)$

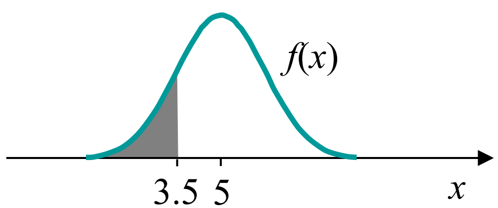
b) $P(4 < X < 6)$

c) $P(X > 5)$

d) $P(X > 6)$

e) O valor de x tal que $P(X \leq x) = 0{,}25$

a)



$$P(X \leq 3.5) = P\left(Z \leq \frac{3.5-5}{\sqrt{7}}\right) = P(Z \leq -0.567) =$$

$$\boxed{Z = \frac{X-5}{\sqrt{7}} \sim N(0,1)}$$

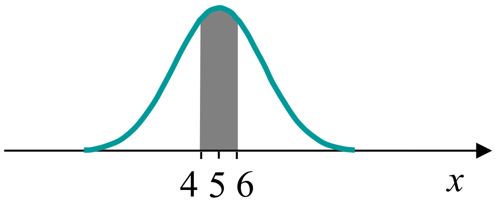
$$= \Phi(-0.567) = 0.2854$$

$$pnorm(-0.567, 0{,}1) = pnorm(-0.567)$$

Nota: *Se não usassemos* $N(0{,}1)$, *bastava* $pnorm(3.5, 5, \sqrt{7})$ *para obter* $P(X \leq 3.5)$.

Exercício

b)



$$P(4<X<6)=P(X<6)-P(X\le 4)=P(X\le 6)-P(X\le 4)=$$

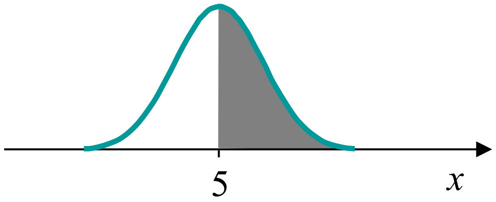
$\boxed{X \text{ é uma } v.\ a. \text{ contínua}}$

$$=P\left(Z\le\frac{6-5}{\sqrt{7}}\right)-P\left(Z\le\frac{4-5}{\sqrt{7}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)-1=$$

$$=2\Phi(0.378)-1=2\times 0.6473-1=0.2946$$

c)

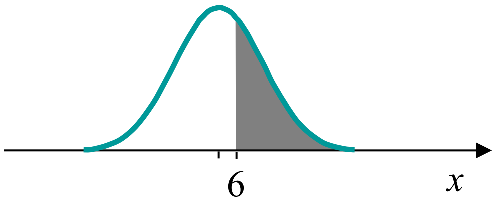


$$P(X>5)=1-P(X\le 5)=1-P\left(Z\le\frac{5-5}{\sqrt{7}}\right)=$$

$$=1-\Phi(0)=1-0.5=0.5$$

Exercício

d)



$$P(X>6) = 1 - P(X \le 6) = 1 - P\left(Z \le \frac{6-5}{\sqrt{7}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(0.378) = \Phi(-0.378) = 0.3527$$

e) $P(X \le x) = 0{,}25 \Leftrightarrow P\left(Z \le \frac{x-5}{\sqrt{7}}\right) = 0{,}25 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x-5}{\sqrt{7}}\right) = 0{,}25 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x-5}{\sqrt{7}} = \Phi^{-1}(0{,}25) = -0{,}6745 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3{,}22$$

$qnorm(0.25)$

$Nota$: $Se\ não\ usassemos\ N(0,1),\ bastava\ qnorm\left(0.25, 5, \sqrt{7}\right)\ para\ obter\ x.$